جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحانات الدورة الإضافية للعام الدراسي 2013 - 2014 أسئلة مقرر البنى الجبرية (1) سنة ثانية رياضيات	المدة: ساعة ونصف العلامة: 100 درجة الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (42 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن المجموعة $\{3, 0\}$ زمرة جزئية من الزمرة Z_4 .

(2) إن عدد عناصر الزمرة الجزئية $<25>$ من الزمرة Z_{30} يساوي 5.

(3) عدد مولدات الزمرة الدوارة ذات المرتبة 5 يساوي 5.

(4) إذا كان $n \in Z^+$ ، فإن $Z/_{nZ}$ زمرة دوارة من المرتبة n .

(5) إذا كانت $(G, .)$ زمرة و$a \in G$ عنصراً مرتبته 15 فإن مرتبة العنصر a^6 في G تساوي 10.

(6) إن كل زمرة دوارة غير منتهية تملك مولداً واحداً.

(7) عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(7)$ يساوي 7 زمر جزئية.

(8) إن مقلوب العنصر 3 في زمرة أولر $U(7)$ يساوي 5 .

(9) إذا كانت G زمرة مرتبتها 29 فإن G تكون زمرة دوارة .

(10) عدد الهومومورفيزمات الزمرية من الزمرة Z_{15} إلى الزمرة Z_{30} يساوي 5.

(11) إن العنصر a^5 مولد للزمرة الدوارة $G = <a>$ والتي مرتبتها 21 .

(12) عدد عناصر زمرة الخارج $U(20)/_{U_4(20)}$ يساوي 5 .

(13) رتبة العنصر $(1, 2)$ من الزمرة $Z_3 \oplus Z_4$ يساوي 12.

(14) إن $Z_2 \oplus Z_4 \cong Z_8$.

السؤال الثاني (30 درجة): لتكن $(G, \cdot)$ زمرة ما، علل صحة ما يلي:

(1) أياً كان $a \in G$، فإن المجموعة $C(a) = \{x: x \in G;\ ax = xa\}$ هي زمرة جزئية من G.

(2) إذا كانت $G = <a>$ دوارة وكان التطبيق $\varphi : Z \to G$ المعرف على النحو: $\varphi(n) = a^n$ متبايناً فإن G تكون غير منتهية.

(3) إذا كانت G منتهية مرتبتها pq حيث p, q عددان أوليان ليسا بالضرورة مختلفان ، فإن مرتبة مركز الزمرة G $(Z(G))$ ، إما أن تساوي 1 أو تساوي pq .

(4) إذا كانت H زمرة جزئية في G وكان $(G:H)=2$، فإن الزمرة الجزئية H تكون ناظمية في G.

(5) جميع الزمر الدوارة المنتهية التي لها المرتبة ذاتها متماثلة.

السؤال الثالث (28 درجة): لتكن $(G, .)$ زمرة ما .

(1) اذكر نص مبرهنة لاغرانج وبرهانها . ثم اذكر نص عكسها .

(2) إذا كانت A زمرة جزئية ناظمية في G ودوارة، فإن أية زمرة جزئية من A تكون ناظمية في G.

(3) ليكن p عدداً أولياً . عرف الـ P- زمرة. ثم أثبت أنه إذا كانت K زمرة جزئية ناظمية في G وكان كل من الزمرتين $G/_K$ ، K هي p- زمرة ، فإن G تكون p- زمرة.

2014 - 8 - 21

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة

(٢)

د. إيمان الخوص

سلم تصحيح مقرر الجبر /١/

للسنة الثانية رياضيات.

الدورة الصيفية للعام الدراسي 2013-2014

تاريخ الامتحان ٤/ 8/ 2014.

الجواب الأول (42 درجة) لكل بند (3) درجات

1) خطأ، نظير 3 هو 1 بالنسبة إلى Z_4.

2) خطأ، عدد عناصر الزمرة $\langle 25 \rangle$ في Z_{30} يساوي 6.

3) خطأ، يساوي 4 مولدات

4) صح.

5) خطأ، $o(a^6) = 5$ لأن $(a^6)^5 = a^{30} = e$.

6) خطأ، ثلاث مولدين.

7) خطأ، 4 زمر جزئية.

8) صح.

9) صح.

10) خطأ، عدد الهومومورفيزمات يساوي 15.

11) صح

12) خطأ، يساوي 2.

13) خطأ، يساوي 6.

14) خطأ، لأن 2، 4 ليسا أوليان فيما بينهما.

الجواب الثاني (30 درجة)

1) بما أن $ea = ae$ أياً كان $a \in G$ نجد أن $e \in C(a)$. ليكن $x, y \in C(a)$

(4) عندئذ $ax = xa$ و $ay = ya$ ومنه $y^{-1}a = ay^{-1}$

كما أن $(xy^{-1})(a) = x(y^{-1}a) = x(ay^{-1}) = (a)xy^{-1}$

ومنه $xy^{-1} \in C(a)$.

...

د. إيمان الخوف

/ ٦ / الحديد

الصفحة الثانية

إن التطبيق $\varphi: Z \longrightarrow G$ غامر لذلك $\forall y \in G$

فإنه يوجد $m \in Z$ بحيث أن $y = a^m$ ومن ثم فإن $\varphi(m) = a^m$.

وبما أن φ متباين فرضاً فإن φ تقابل ومنه قدرة G = قدرة Z

أي G غير منتهية.

(6) 3) $Z(G)$ زمرة جزئية من G ومنه حسب لاغرانج $(Z(G):1) \in \{1, p, q, pq\}$

وهنا نميز حالتين: 1) إذا كانت G تبديلية عندئذ $G = Z(G)$ ومنه

$(Z(G):1) = pq$. 2) G ليست تبديلية عندئذ $(Z(G):1) \neq pq$.

لنفرض $(Z(G):1) = p$ عندئذ $(G/Z(G):1) = q$ ومنه $G/Z(G)$ دوارة

ومنه G تبديلية وهذا مرفوض فرضاً. كذلك الأمر عندما $(Z(G):1) = q$.

مما سبق نجد $(Z(G):1) = 1$.

(7) 4) بما أن $(G:H) = 2$ فإن مجموعة المرافقات اليسارية المختلفة لـ H في G

هي $\{H, aH\}$ حيث $a \in G$ وهنا نميز حالتين: إذا كان $a \in H$ فإن $aH = Ha$

إذا كان $a \notin H$ وبما أن $G = H \cup aH$ نجد أن $aH = G/H = Ha$

وبالتالي H ناظمية في G.

5) كل زمرة منتهية دوارة من المرتبة n إيزومورفية مع Z_n

(6) وبالتالي جميع الزمر الدوارة المنتهية من المرتبة n ; مع Z_n ومنه تكون

متماثلة مع بعضها.

الجواب الثالث (28 درجة)

1) مبرهنة لاغرانج: G زمرة منتهية. مرتبة أي زمرة جزئية H من G

تقسم مرتبة G.

البرهان: لنفرض $a_1H, a_2H, \ldots, a_nH$ جميع المرافقات اليسارية المختلفة

لـ H في G. وبما أن المجموعة $M = \{a_iH : 1 \leq i \leq n\}$

$x, y \in C(a)$
$y^{-1}a =$
$(xy^{-1}$

الصفحة الثالثة

شكل تجزئة لـ G فإن $G = a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_nH$

ومنه $(G:1) = \text{Card}\, a_1H + \text{Card}\, a_2H + \dots + \text{Card}\, a_nH$

وبما أن $\text{Card}\, a_iH = \text{Card}\, H$ عندئذ $(G:1) = n\, \text{Card}\, H$

أي $(G:1) = (G:H)(H:1)$.

نقض عكس مبرهنة لاغرانج . إذا وجد عدد k يقسم مرتبة G فليس من الضروري إيجاد زمرة جزئية مرتبتها K .

2) $A = \langle a \rangle$ وناظمية في G حيث $a \in A$. لتكن T زمرة جزئية من A عندئذ T جزئية في G ودوارة . لنفرض $T = \langle a^m \rangle$ ولنبرهن أن $gTg^{-1} \subseteq T$ أياً كان $g \in G$. ليكن $z \in gTg^{-1}$ عندئذ يوجد $(a^m)^k \in T$ بحيث $z = g(a^m)^k g^{-1}$ ومنه وبما أن A ناظمية في G فإن $(gag^{-1})^k = ga^kg^{-1} \in A$ ومنه $ga^kg^{-1} = a^s$ حيث $s \in \mathbb{Z}$

وهذا يبين أن $z = g(a^m)^k g^{-1} = g(a^k)^m g^{-1} = [ga^kg^{-1}]^m = (a^s)^m = (a^m)^s \in T$

ومنه T ناظمية في G

3) G p-زمرة ، مرتبتها قوة للعدد الأولي P .

إن $(G/K : 1) = p^r$ و $(K:1) = p^s$ وبما أن $(G:K) = (G/K : 1) = p^r$ وحسب لاغرانج يكون .

$(G:1) = (G:K)(K:1) = p^r p^s = p^{r+s}$

ومنه G عبارة عن p- زمرة .

انتهت الأجوبة

د. إيمان الخوم